

# APLICAÇÃO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM BIOGERADOR

MAURO JUNIO REIS SALES<sup>1</sup>, ALÍPIO MONTEIRO BARBOSA<sup>2</sup> &  
FÁBIO PIRES MOURÃO<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Graduado em Engenharia Elétrica, [maurojr-sales@gmail.com](mailto:maurojr-sales@gmail.com)

<sup>2</sup>Professor do Curso de Engenharia Elétrica, [alipio.barbosa@unifemm.edu.br](mailto:alipio.barbosa@unifemm.edu.br),  
[fabio.mourao@unifemm.edu.br](mailto:fabio.mourao@unifemm.edu.br)

Caderno Saberes, n. 6, 2020

**RESUMO** - O objetivo deste trabalho foi a criação de um modelo matemático que descrevesse o comportamento do biogás em um biogenerator. Tal intento foi possível com o auxílio dos Métodos Numéricos. Foram realizados testes no laboratório de biomassa do Centro Universitário de Sete Lagoas e, após registradas as medições, as variáveis envolvidas no processo foram estudadas, a fim de se obter a correta identificação dos parâmetros dependentes e independentes do sistema. À vista disso, foi criada uma relação entre os dados de entrada, a vazão do biogás, os dados de saída, e a energia elétrica gerada. Então foi aplicado o Método dos Mínimos Quadrados e da Eliminação de GAUSS para a solução do problema proposto. Por fim, foi verificada a eficácia da função polinomial através do cálculo do coeficiente de determinação, que apontou que o modelo matemático apresentava uma qualidade de ajuste de 99,72%.

**Palavras-chave:** Biogás. Coeficiente de Determinação. Métodos Numéricos. Modelagem.

## INTRODUÇÃO

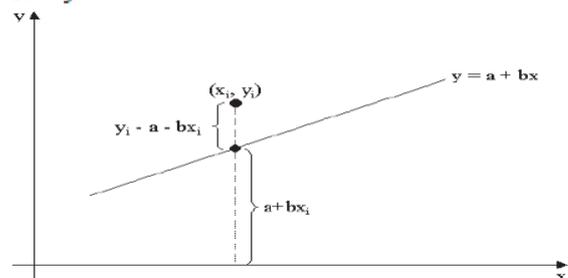
De acordo com Sanches e Furlan (2007) os métodos numéricos são algoritmos compostos por um número finito de operações envolvendo apenas números (operações aritméticas elementares, cálculos de funções, consulta a uma tabela de valores, a um gráfico, arbitramento de um valor, etc.). São muito utilizados no processo de modelagem, que consiste na representação do comportamento de um sistema físico através de um modelo matemático.

Um recurso muito utilizado em uma modelagem é o Método dos Mínimos Quadrados, pois, conforme Souza (2018), quando se conhece uma tabela de pontos  $(x_i, y_i)$  e busca-se a expressão matemática da curva  $y = f(x)$  que melhor se ajusta ao conjunto de pontos, é necessária a utilização de tal método, que consiste em fazer uma modelagem matemática, minimizando a distância de cada ponto  $(x_i, y_i)$  da tabela para encontrar uma curva que melhor se ajuste ao conjunto dos pontos.

O autor deduz que para ajustar um conjunto de pontos a uma reta  $y = a + bx$ , onde  $a$  e  $b$  são os parâmetros a serem

determinados, o objetivo é minimizar a distância de cada ponto  $(x_i, y_i)$  da tabela a cada ponto  $(x_i, a + bx_i)$  da reta, conforme mostrado na FIG 1.

FIGURA 1 - Distância de um ponto  $(x_i, y_i)$  à reta  $y = a + bx$



Fonte: SOUZA, 2018, s.p.

Por meio da minimização da soma do quadrado dessas distâncias, obtém-se o sistema de equações cujas incógnitas são os parâmetros  $a$  e  $b$  da equação  $y = a + bx$ , conforme a equação 1 demonstrada a seguir:

O autor ainda afirma que o sistema descrito na equação 1 é para funções de grau 1. Para funções polinomiais de maiores graus, expressas por  $y_{(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_mx^m$ , o

objetivo é o mesmo: minimizar a soma das distâncias de cada ponto  $(x_i, y_i)$  da tabela, seguindo a mesma lógica, chega-se ao sistema de equações, conforme demonstrado pela equação 2:

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + \left(\sum_1^n x_i\right) \cdot a_1 + \left(\sum_1^n x_i^2\right) \cdot a_2 + \dots + \left(\sum_1^n x_i^m\right) \cdot a_m = \sum_1^n y_i \\ \left(\sum_1^n x_i\right) \cdot a_0 + \left(\sum_1^n x_i^2\right) \cdot a_1 + \left(\sum_1^n x_i^3\right) \cdot a_2 + \dots + \left(\sum_1^n x_i^{m+1}\right) \cdot a_m = \sum_1^n x_i y_i \\ \left(\sum_1^n x_i^2\right) \cdot a_0 + \left(\sum_1^n x_i^3\right) \cdot a_1 + \left(\sum_1^n x_i^4\right) \cdot a_2 + \dots + \left(\sum_1^n x_i^{2m}\right) \cdot a_m = \sum_1^n x_i^2 y_i \end{cases}$$

Fonte: SOUZA, 2018, s.p.

Por se tratar de uma estimativa, o método pode conter um pequeno erro em relação ao sistema original. Para identificar a qualidade do ajuste do modelo, o autor sugere fazer uma análise do coeficiente de determinação, demonstrado na equação 3:

$$r^2 = \frac{SQReg}{SQTotal} = \frac{a_0 \sum_{i=1}^n y_i + a_1 \sum_{i=1}^n y_i x_i + \dots + a_n \sum_{i=1}^n y_i x_i^n - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n}}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n}}$$

Fonte: SOUZA, 2018, s.p.

Souza (2018) afirma que a razão da soma dos quadrados da regressão e a soma de quadrados total aponta quanto o modelo matemático criado através do método foi capaz de explicar os dados coletados, ou seja,  $r^2$ , coeficiente de determinação, varia entre 0 e 1, e quanto mais próximo de 1 melhor é a qualidade do ajuste. Por exemplo,  $r^2 = 0,9$ , indica que 90% da variabilidade de  $y_i$  pode ser explicada em função da variabilidade de  $x_i$ .

Outro Método Numérico muito utilizado é o da Eliminação de GAUSS, pois de acordo com Fampa e Rincon (2018) é possível resolver sistemas de equações lineares através

de operações elementares, transformando um sistema mais complexo em um mais simples de ser resolvido, chegando a mesma solução do problema original. Convém ressaltar que tal método foi aplicado porque a utilização dos Mínimos Quadrados resulta na solução de um sistema.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Fonte: FAMPA; RINCON, 2018, p.5

Citando como exemplo o sistema de equações acima, os autores afirmam que é possível obter a solução através de operações elementares e artifícios algébricos, transformando tal sistema complexo para um triangular<sup>1</sup>, ou seja, mais simples de ser resolvido, por meio da retro solução<sup>2</sup>.

$$\begin{cases} a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + a_{13}^{(2)}x_3 = b_1^{(2)} \\ 0 + a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = b_2^{(2)} \\ 0 + 0 + a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)} \end{cases}$$

Fonte: FAMPA; RINCON, 2018, p.7

Visto que os métodos numéricos são empregados para a solução de problemas complexos e no processo de modelagem, eles foram utilizados para o alcance do objetivo deste trabalho, que foi o de encontrar um modelo matemático que descrevesse o comportamento do biogás<sup>3</sup> em um biogenerador<sup>4</sup>.

Tal pertinência no objetivo proposto, se deve ao fato de que o biogás é uma alternativa viável para a substituição de alguns combustíveis poluentes, pois apresenta como

<sup>1</sup>Todos os elementos da matriz/sistema abaixo da diagonal principal são zero.

<sup>2</sup>Como os elementos abaixo da diagonal principal do sistema são nulos, encontra-se o valor da variável da última linha e substitui na linha acima, e assim por diante até encontrar o valor de todas as incógnitas.

<sup>3</sup>É produzido a partir da mistura de dióxido de carbono e metano. É utilizado como combustível para fogões, motores e geração de energia elétrica.

<sup>4</sup>Equipamento que utiliza o biogás para a geração de energia elétrica.

preeminência o fato de ser considerado uma energia limpa, renovável e abundante no país, por isso, deve ser um objeto de maior estudo.

## MATERIAL & MÉTODOS

Para a realização deste trabalho foram realizados testes no laboratório de biomassa do Centro Universitário de Sete Lagoas<sup>5</sup>, a fim de identificar a relação entre energia elétrica gerada em função da vazão do biogás em um biogenerator<sup>6</sup>.

Primeiramente, foi conectado o medidor de vazão de gás G1.0 Daeflex com o botijão de gás GLP P13 e o motor D229-4<sup>7</sup>, foi necessária a utilização de duas mangueiras com encaixe 3/8, duas roscas BSP 3/4 e duas braçadeiras. Posteriormente foram conectadas pequenas cargas nos terminais de saída do biogenerator, o equipamento então foi energizado e através de uma válvula no GLP, a vazão do biogás foi controlada até a potência gerada ser o suficiente para alimentar as cargas, após as medições o equipamento foi desenergizado.

O próximo passo consistiu em nova energização do biogenerator, porém, com um aumento das cargas conectadas nos terminais de saída do equipamento. Similarmente ao procedimento anterior, a vazão do biogás novamente foi controlada até a potência gerada ser o suficiente para suprir o consumo desejado.

Convém ressaltar que por se tratar de testes realizados em laboratório, as cargas usadas foram bem menores se comparadas com a capacidade máxima que o equipamento pode alimentar. Desse modo, as leituras não seriam tão precisas nos medidores do biogenerator, que possuem grandes fundos de escala. Logo, foram utilizados então o amperímetro AD-99011 e o multímetro MD-6110 como ponta de prova, para a obtenção de aferições mais precisas.

Além da vazão do biogás e da potência gerada, foi necessário realizar a medição de outros parâmetros no processo, tais como a rotação do motor, frequência, temperatura do

combustível, tempo de operação, corrente e tensão, pois, diante de todas as medições, o próximo passo foi o de estabelecer quais seriam as variáveis dependentes e independentes do processo, para então se criar uma relação entre elas e enfim se chegar à solução do objetivo do trabalho que foi a criação de um modelo matemático que descrevesse o comportamento do biogenerator.

## RESULTADOS & DISCUSSÃO

Após a execução dos testes, foi perceptível que as grandezas dependentes<sup>8</sup> no processo são a vazão do biogás e a potência gerada. Logo, tais parâmetros foram utilizados para tecer a modelagem. A FIG. 2 expressa o comportamento do biogenerator, ou seja, a energia elétrica gerada em função da vazão do biogás.

FIGURA 2 - Comportamento do Biogenerator GGB 30



Fonte: Dados da Pesquisa.

Com os dados obtidos, notou-se uma relação diretamente proporcional, quanto menor

$$\begin{cases} n \cdot a + \left( \sum_i^n x_i \right) \cdot b = \sum_i^n y_i \\ \left( \sum_i^n x_i \right) \cdot a + \left( \sum_i^n x_i^2 \right) \cdot b = \sum_i^n x_i y_i \end{cases}$$

<sup>5</sup>Os testes foram executados entre setembro e novembro de 2018.

<sup>6</sup>O biogenerator usado nos testes foi o modelo GGB30, construído pela empresa Biogás Motores Estacionários.

<sup>7</sup> Motor a diesel da empresa MWM.

<sup>8</sup> Variáveis que descrevem o sistema e que são mais relevantes para o resultado final.

a vazão do biogás menor a potência entregue e quanto maior a vazão maior a potência de saída. Tal resultado já era esperado, pois é através do poder calorífico<sup>9</sup> do biogás que há geração de energia elétrica.

Todavia, quando o equipamento atingir a capacidade máxima de operação, independente de aumentar a vazão do biogás, a potência de saída será constante. Conforme relatado pelo fabricante do biogeração, a potência máxima gerada é de 30000 VA, o que corresponde a 24000 W<sup>10</sup>.

Já que o gráfico não apresenta um comportamento constante em todo o processo, através do *software Excel* foi traçada uma linha de tendência entre os pontos e, a estimação mais próxima dos valores medidos foi através de um ajuste polinomial de grau 6. Para encontrar uma função que expressasse tal comportamento, foi empregado o Método dos Mínimos Quadrados.

Aplicando o Método dos Mínimos Quadrados, apresentado na equação 2, para o conjunto de pontos do gráfico da FIG. 2 para uma função polinomial de sexto grau chegou-se ao seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} 20a_0 + 53,65a_1 + 245,71a_2 + 1412,52a_3 + 9123,6a_4 + 62878,96a_5 + 450496,6a_6 = 263500 \\ 53,65a_0 + 245,71a_1 + 1412,52a_2 + 9123,6a_3 + 62878,96a_4 + 450496,6a_5 + 3308879a_6 = 1059785 \\ 245,71a_0 + 1412,52a_1 + 9123,6a_2 + 62878,96a_3 + 450496,6a_4 + 3308879a_5 + 24721666a_6 = 5494304,15 \\ 1412,52a_0 + 9123,6a_1 + 62878,96a_2 + 450496,6a_3 + 3308879a_4 + 24721666a_5 + 187004312,1a_6 = 33002698,1825 \\ 9123,6a_0 + 62878,96a_1 + 450496,6a_2 + 3308879a_3 + 24721666a_4 + 187004312,1a_5 + 1427941312a_6 = 216673724,1911 \\ 62878,96a_0 + 450496,6a_1 + 3308879a_2 + 24721666a_3 + 187004312,1a_4 + 1427941312a_5 + 10984468516a_6 = 1502739890,4214 \\ 450496,6a_0 + 3308879a_1 + 24721666a_2 + 187004312,1a_3 + 1427941312a_4 + 109844685a_5 + 85002700237a_6 = 10793323457 \end{array} \right.$$

Fonte: Dados da Pesquisa.

Para a solução do sistema de equações foi utilizado o Método da Eliminação de GAUSS. Chegou-se então a um sistema equivalente e triangular:

$$\left\{ \begin{array}{l} 20a_0 + 53,65a_1 + 245,71a_2 + 1412,52a_3 + 9123,6a_4 + 62878,96a_5 + 450495,57a_6 = 263500 \\ 101,79a_1 + 753,4a_2 + 5334,51a_3 + 38404,89a_4 + 281822,76a_5 + 2100424,28a_6 = 352946,25 \\ 528,88a_2 + 6044,01a_3 + 54168,05a_4 + 450573,47a_5 + 3641599,89a_6 = -355142,24 \\ 2114,75a_3 + 32918,84a_4 + 363038,12a_5 + 3501237,59a_6 = -44596,07 \\ 10213,44a_4 + 197197,84a_5 + 2527276,34a_6 = 380466,67 \\ 36147,27a_5 + 842513,04a_6 = 40420,58 \\ 127714,69a_6 = -491474,75 \end{array} \right.$$

Fonte: Dados da Pesquisa.

Por se tratar de um sistema triangular, através da retro solução obteve-se os valores dos coeficientes, exibidos na TAB. 1:

Tabela 1- Valores dos coeficientes do sistema de equações

Coeficiente	Valores
$a_0$	43,6
$a_1$	7375,05
$a_2$	-3603,21
$a_3$	2651,39
$a_4$	-763,89
$a_5$	90,81
$a_6$	-3,848

Fonte: Dados da Pesquisa.

Conhecidos os valores dos coeficientes, chegou-se à função polinomial que descreve o comportamento do biogeração, em que o termo  $x$  equivale à vazão do biogás em  $m^3/h$  e  $Y$  a potência gerada em *Watt*.

$$Y = -3,848x^6 + 90,81x^5 - 763,89x^4 + 2651,39x^3 - 3603,21x^2 + 7375,05x + 43,6$$

### Qualidade do Ajuste do Modelo Matemático Polinomial

A fim de identificar a qualidade do ajuste do modelo matemático polinomial, foi calculado o coeficiente de determinação:

$$SQReg = (43,6 * 263500) + (7375,05 * 1059785) - (3603,2 * 5494304) + (2651,39 * 33002698) - (763,89 * 216673724,2) + (90,81 * 1502739890) - (3,848 * 10793323457) - \frac{263500^2}{20}$$

$$SQReg = 1478000311$$

$$SQTotal = 4953750000 - \frac{263500^2}{20}$$

$$SQTotal = 1482137500$$

$$r^2 = \frac{SQReg}{SQTotal}$$

$$r^2 = \frac{1478000311}{1482137500}$$

$$r^2 = 0,9972$$

Fonte: Dados da Pesquisa.

<sup>9</sup>Quantidade de energia interna contida no combustível, liberada a partir do processo de combustão.

<sup>10</sup> Visto que a grandeza fornecida pelo fabricante foi diferente da grandeza medida nos testes, foi convertido o valor da potência aparente para potência ativa através do conceito do triângulo retângulo de potência.

A função polinomial apresenta uma qualidade de ajuste de 0,9972, ou seja, 99,72% da variabilidade de  $y_i$  (potência gerada) em função de  $x_i$  (vazão do biogás) pode ser explicada pela equação criada.

### CONCLUSÕES

Em um cenário onde há um crescimento ininterrupto no uso de energia elétrica, a biomassa é uma alternativa viável de fonte energética para suprir a demanda por eletricidade.

Visto que é considerada uma energia limpa e pode suprir até 12% da demanda nacional por energia. Por isso, foi estudado o comportamento do biogás em um biogerador, feito uma modelagem e criada uma função que descreve a relação entre vazão do biogás com energia elétrica gerada. Foi possível obter uma solução para o problema proposto com o auxílio dos Métodos Numéricos.

É inegável não reconhecer a eficácia dos métodos numéricos no auxílio dos problemas mais complexos e diversos na engenharia, pois eles são utilizados para transformar um modelo matemático em um problema numérico e possuem como vantagem o fato de chegar a uma solução aproximada conhecendo-se apenas valores numéricos, cita-se como exemplo a criação do modelo matemático que descreve o comportamento do biogerador.

### REFERÊNCIAS

FAMPA, Márcia; RINCON, Mauro. **Método de Eliminação de Gauss**. Disponível em: <[http://www.dcc.ufrj.br/~rincon/Disciplinas/Algebra%20Linear/Aula\\_013.pdf](http://www.dcc.ufrj.br/~rincon/Disciplinas/Algebra%20Linear/Aula_013.pdf)>. Acesso em 16 nov. 2018.

SANCHES, Ionildo José; FURLAN, Diógenes Cogo. **Métodos Numéricos**. Curitiba, 2007. Acesso em: <<http://www.inf.ufpr.br/kunzle/disciplinas/ci202/M%C3%A9todos%20Num%C3%A9ricos%20-%20UFPR%20-%202007.pdf>>. Acesso em 29 abr. 2018

SOUZA, Marcene Jamilson Freitas. **Ajuste de Curvas Pelo Método dos Mínimos Quadrados**. Disponível em: <<http://www.decom.ufop.br/marcone/Disciplina/MetodosNumericosEstatisticos/QuadradosMinimos.pdf>>. Acesso em 16 nov. 2018.

WEG. **Alternadores ficha técnica características gerais**. Disponível em: <[http://ecatalog.weg.net/TEC\\_CAT/tech\\_alter\\_web.asp](http://ecatalog.weg.net/TEC_CAT/tech_alter_web.asp)>. Acesso em: 27 abr. 2018.